

ИЗГИБ ПОЛОСЫ СРЕДНЕЙ ТОЛЩИНЫ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ УСИЛИЙ В СРЕДИННОЙ ПЛОСКОСТИ

*Леонтьев А.Н., Бен Хелал Монсеф, Вагиалла Хасан Ахмед Мохаммед,
Московский государственный строительный университет*

Напряженное и деформированное состояние плиты средней толщины при ее изгибе от действия поперечной нагрузки описывается, как известно [1], уравнениями:

$$\nabla^2 \nabla^2 t(x, y) = \frac{p(x, y)}{D}, \quad \nabla^2 \varphi(x, y) - \frac{2Gh}{D(1-\nu)} \varphi(x, y) = 0, \quad (1)$$

где G – модуль упругости второго рода материала плиты;
 D, h, ν – соответственно ее цилиндрическая жесткость, толщина и коэффициент Пуассона.

Искомые функции $t(x, y)$, $\varphi(x, y)$ связаны с прогибом $w(x, y)$ и углами поворота $t_x(x, y)$, $t_y(x, y)$ выражениями:

$$w(x, y) = t(x, y) - \frac{D}{Gh} \nabla^2 t(x, y), \quad (2)$$

$$t_x(x, y) = \frac{\partial t(x, y)}{\partial x} - \frac{D(1-\nu)}{2Gh} \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y}, \quad (3)$$

$$t_y(x, y) = \frac{\partial t(x, y)}{\partial y} + \frac{D(1-\nu)}{2Gh} \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x}.$$

При этом являются справедливыми зависимости:

$$\begin{aligned} \nabla^2 t(x, y) &= \frac{\partial t_x(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial t_y(x, y)}{\partial y}, \\ \varphi(x, y) &= \frac{\partial t_y(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial t_x(x, y)}{\partial y}. \end{aligned} \quad (4)$$

В случае учета, кроме поперечной нагрузки $q(x, y)$, сил $N_x, N_y, N_{xy}=N_{yx}$, действующих в срединной плоскости плиты (рис.1), второе из уравнений (1) остается неизменным, а к первому должны быть добавлены проекции этих сил на ось Oz , возникающие за счет изгиба плиты. Заметим, что эти силы связаны между собой уравнениями равновесия:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial N_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0. \quad (5)$$

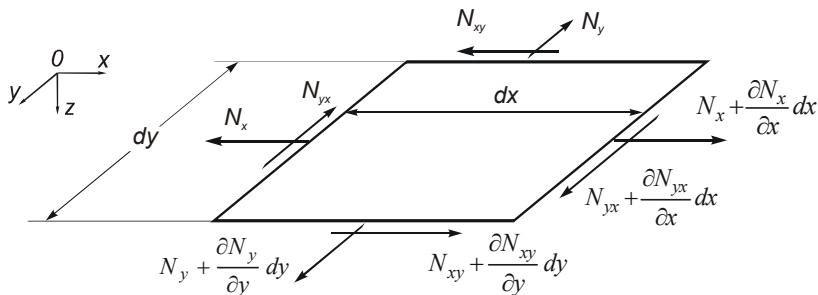


Рис. 1

Спроецируем силы N_x , N_y , $N_{xy}=N_{yx}$ и их приращения на вертикальную ось. Тогда первое из уравнений (1) с учетом выражений (3) – (5) можно записать в виде:

$$\nabla^2 \nabla^2 t - \frac{N_x}{D} \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} - \frac{N_y}{D} \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} - 2 \frac{N_{xy}}{D} \frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} = \frac{q}{D}. \quad (6)$$

Будем считать, что продольные края рассматриваемой плиты шарнирно оперты (рис.2). При этом искомые функции могут быть представлены в виде:

$$t(x, y) = \sum_n W_n(x) \cos \beta_n y, \quad (7)$$

$$\varphi(x, y) = \sum_n \Phi_n(x) \sin \beta_n y, \text{ где } \beta_n = \frac{n\pi}{b}. \quad (8)$$

Подставляя разложение (7) в уравнение (6), в силу ортогональности тригонометрических функций для каждого номера n получим обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка, которое при действии только продольных сил N_x запишется в виде:

$$W_n^{IV} - 2 \left(\beta_n^2 + \frac{N_x}{2D} \right) W_n^{II} + \beta_n^4 W_n = \frac{P_n}{D}, \quad (9)$$

а при действии продольных сил N_y :

$$W_n^{IV} - 2\beta_n^2 W_n^{II} + \beta_n^4 \left(1 + \frac{N_y}{\beta_n^2 D} \right) W_n = \frac{P_n}{D},$$

$$\text{где } p_n = \frac{2}{b} \int_0^b q(x, y) \cos \beta_n y dy. \quad (10)$$

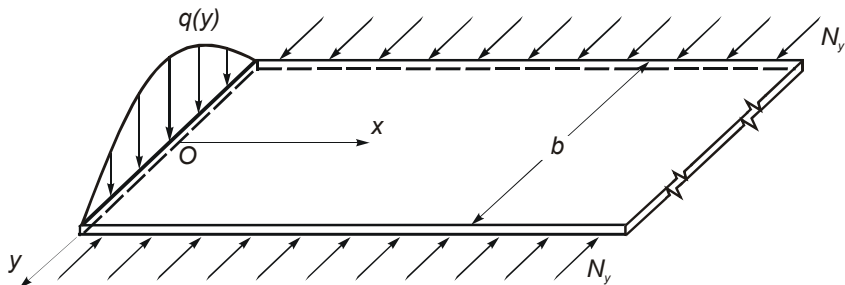


Рис. 2

Уравнения (9) и (10) могут быть записаны в стандартной форме, характерной для задачи об изгибе балки на упругом основании:

$$W_n^{IV} - 2r_n^2 W_n^{II} + s_n^4 W_n = \frac{P_n}{D}. \quad (11)$$

В зависимости от соотношения величин коэффициентов r_n и s_n определяется вид корней соответствующего характеристического уравнения и, следовательно, вид частных интегралов, составляющих его решение.

Рассмотрим вначале случай загрузки плиты силами N_y , равномерно распределенными по ее продольным краям (см. рис.2). Из сопоставления уравнений (10) и (11) можно видеть, что коэффициентами уравнения (11) в этом случае будут величины:

$$r_n^2 = \beta_n^2, \quad s_n^4 = \beta_n^4 \left(1 + \frac{N_y}{\beta_n^2 D} \right), \quad (12)$$

соотношение между которыми зависит от знака усилий N_y : при растяжении плиты ($N_y > 0$) $s_n > r_n$, при сжатии – ($N_y < 0$) $s_n < r_n$.

При $s_n > r_n$ корни k_n характеристического уравнения определяют формулами:

$$k_n = \pm \alpha_n \pm i\gamma_n, \quad (13)$$

$$\text{где } \alpha_n = \sqrt{\frac{s_n^2 + r_n^2}{2}}, \quad \gamma_n = \sqrt{\frac{s_n^2 - r_n^2}{2}}, \quad (14)$$

а общее решение дифференциального уравнения (11) записывается в виде:

$$W_n(x) = C_{1n} \Phi_{1n}(x) + C_{2n} \Phi_{2n}(x) + C_{3n} \Phi_{3n}(x) + C_{4n} \Phi_{4n}(x) + W_n^0(x), \quad (15)$$

где $\Phi_{1n}(x), \dots, \Phi_{4n}(x)$ – гиперболотригонометрические функции,

$W_n^0(x)$ – частное решение, зависящее от поперечной нагрузки $p_n(x)$.

При $s_n < r_n$ корни характеристического уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} k_1 = -k_2 = \lambda_{1n} &= \sqrt{r_n^2 + \sqrt{r_n^4 - s_n^4}}, \\ k_3 = -k_4 = \lambda_{2n} &= \sqrt{r_n^2 - \sqrt{r_n^4 - s_n^4}}, \end{aligned} \quad (16)$$

в соответствии с чем решение уравнения (11) записывается в форме:

$$\begin{aligned} W_n(x) = C_{1n} \operatorname{sh} \lambda_{1n} x + C_{2n} \operatorname{ch} \lambda_{1n} x + \\ + C_{3n} \operatorname{sh} \lambda_{2n}(x) + C_{4n} \operatorname{ch} \lambda_{2n}(x) + W_n^0(x) \end{aligned} \quad (17)$$

В случае загрузки плиты силами N_x коэффициенты уравнения (11) будут иметь вид:

$$r_n^2 = \beta_n^2 \left(1 + \frac{N_x}{2\beta_n^2 D} \right), \quad s_n^4 = \beta_n^4. \quad (18)$$

Из соотношений (18) можно видеть, что на этот раз при растяжении плиты ($N_x > 0$) $s_n < r_n$, а при сжатии ($N_x < 0$) $s_n > r_n$, и решения задачи будут представлены соответственно выражениями (17) или (15).

Рассмотрим теперь задачу об изгибе полубесконечной плиты, загруженной в начальном сечении поперечной нагрузкой $q(y)$ и продольными сжимающими силами N_y , равномерно распределенными по продольным краям (см. рис.2).

В этом случае, если заданная поперечная нагрузка представлена выражением $q_y = q_0 \cos \beta y$, где $\beta = \pi/b$, то уже один первый член разложения (7) будет представлять точное решение, в результате чего индекс n всюду может быть опущен. Учитывая бесконечную протяженность плиты, решение уравнения (11) можно представить в виде:

$$W(x) = C_1 e^{-\lambda_1 x} + C_2 e^{-\lambda_2 x}. \quad (19)$$

Для полного решения задачи об изгибе плиты средней толщины к выражению (19) необходимо добавить еще интеграл второго из уравнений (1), который с учетом разложения (8) и бесконечности плиты может быть записан в виде:

$$\Phi(x) = D_1 e^{-gx}, \quad \text{где } g = \sqrt{\beta^2 + \frac{Gh}{D(1-\nu)}} = \frac{1}{h} \sqrt{12 + \beta^2 h^2}. \quad (20)$$

Для определения трех постоянных интегрирования C_1, C_2, D_1 в начальном сечении ($x = 0$) могут быть сформулированы следующие граничные условия:

$$\begin{aligned}
 M_x &= -D \left[W'' - \nu \beta^2 W - \frac{h^2(1-\nu)}{12} \beta \Phi' \right] \cos \beta y = 0, \\
 M_{xy} &= -D(1-\nu) \left[-\beta W' + \frac{h^2}{24} (\Phi'' + \beta^2 \Phi) \right] \sin \beta y = 0, \\
 Q_x &= -D \left[W''' - \beta^2 W' - \frac{(1-\nu)}{12} \beta \Phi \right] \cos \beta y = -q \cos \beta y.
 \end{aligned} \tag{21}$$

Раскрывая эти условия при помощи выражений (19) и (20), получим систему трех алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
 (\lambda_1^2 - \nu \beta^2) C_1 + (\lambda_2^2 - \nu \beta^2) C_2 + \frac{h^2(1-\nu)}{12} \beta g D_1 &= 0, \\
 \beta (\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2) + \frac{h^2}{24} (\beta^2 + g^2) D_1 &= 0, \\
 \lambda_1 (-\lambda_1^2 + \beta^2) C_1 + \lambda_2 (-\lambda_2^2 + \beta^2) C_2 - \frac{1-\nu}{2} \beta D_1 &= \frac{q_0}{D}.
 \end{aligned} \tag{22}$$

Рассматривая ту же задачу при наличии растягивающих сил N_y , решение (15) можно записать в виде:

$$W(x) = C_1 e^{-\alpha x} \sin \gamma x + C_2 e^{-\alpha x} \cos \gamma x. \tag{23}$$

Для определения постоянных интегрирования граничные условия (21) и выражения (20) и (23) позволяют записать следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
 -2\alpha \gamma C_1 + (\alpha^2 - \gamma^2 - \nu \beta^2) C_2 + \frac{h^2(1-\nu)}{12} \beta g D_1 &= 0, \\
 -\beta \gamma C_1 + \beta \alpha C_2 + \frac{h^2}{24} (g^2 + \beta^2) D_1 &= 0, \\
 \gamma (3\alpha^2 - \gamma^2 - \beta^2) C_1 + \alpha (3\gamma^2 - \alpha^2 + \beta^2) C_2 - \frac{1-\nu}{2} \beta D_1 &= \frac{q_0}{D}.
 \end{aligned} \tag{24}$$

После решения систем уравнений (22) и (24) и нахождения постоянных C_1, C_2, D_1 все расчетные величины определяются по формулам теории изгиба пластинок средней толщины [1]. Так например, прогиб плиты $w(x,y)$ и изгибающий момент $M_y(x,y)$ определяются в виде:

$$w(x,y) = \left[W(x) - \frac{12}{h^2} (W''(x) - \beta^2 W(x)) \right] \cos \beta y, \quad (25)$$

$$M_y(x,y) = -D \left[\begin{array}{l} -\beta^2 W(x) + \nu W''(x) - \\ -\frac{h^2(1-\nu)}{12} \beta \Phi'(x) \end{array} \right] \cos \beta y, \quad (26)$$

где входящая в (25) и (26) функция $W(x)$ имеет вид (19) при сжатии плиты и вид (23) при растяжении.

На рис.3 и рис.4 приведены кривые, показывающие зависимость величины прогиба $w(0)$ и изгибающего момента $M_y(0)$ в середине загруженного края плиты от величины безразмерных продольных усилий $\bar{N}_y = N_y b^2 / D$. Сплошные линии 1 и 2 относятся здесь, соответственно, к случаям сжатия и растяжения плиты средней толщины при $h/b = 0,2$ и $\nu = 0,2$, а пунктирные линии 3 и 4 – к случаям сжатия и растяжения тонкой плиты.

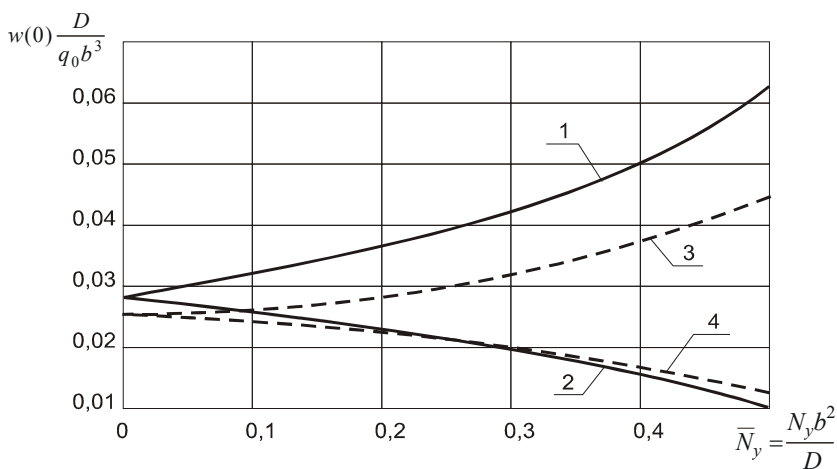


Рис. 3

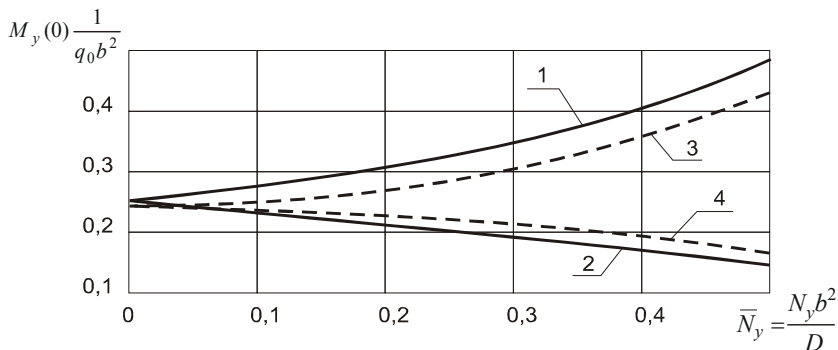


Рис. 4

Можно видеть, что увеличение продольных усилий N_y приводит к существенному изменению значений прогиба и изгибающих моментов: увеличению при сжатии и уменьшению при растяжении. При этом в процентном отношении прогибы изменяются более интенсивно, чем изгибающие моменты. Следует отметить также, что влияние продольных усилий на прогибы плиты средней толщины оказывается несколько большим, чем на прогибы тонкой плиты и большим при сжатии, чем при растяжении. При этом линии 1 и 3, близкие к прямым при малых значениях N_y , становятся криволинейными с тенденцией к резкому возрастанию при увеличении N_y и приближением их значений к критическим.

Библиографический список

1. Власов Б.Ф. Уравнения изгиба плит средней толщины // Теоретические и экспериментальные исследования прочности и жесткости элементов строительных конструкций. – М.: МИСИ, 1989.
2. Габбасов Р.Ф., Филатов В.В. Расчет сжато-изогнутых пластин при неполном контакте с упругим основанием // Сб. трудов МГСУ. – М., 1999.
3. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. – М.: Наука, 1966.
4. Турганбаев А.Т. Изгиб прямоугольной плиты, лежащей на упругом основании Винклера с учетом влияния продольных усилий // Основания, фундаменты и механика грунтов. 1993, №3.